LE CONICHE

Luogo geometrico e sua equazione

Definizione di luogo: una figura F si dice luogo (geometrico) dei punti che godono di una particolare proprietà P se è verificata la seguente condizione: tutti i punti della figura, e solo essi, godono della proprietà P

- Esempio classico di un luogo è il luogo della circonferenza

Equazioni di un luogo geometrico

La rappresentazione nel piano cartesiano dei punti e delle figure è molto utile ed esemplificativo nello studio degli enti geometrici. L'identificazione di tali enti avviene mediante l'associazione di punti generici a coppie ordinate di numeri reali che sono le coordinate.
Tale identificazione consente di tradurre proprietà geometriche in relazioni algebriche. Per questo in geometria analitica è fondamentale il concetto di luogo.

Le proprietà del luogo vengono TRADOTTE in una equazione nelle due incognite x e y del tipo $F(x;y)=0$.

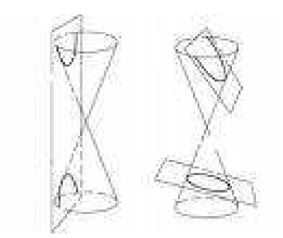
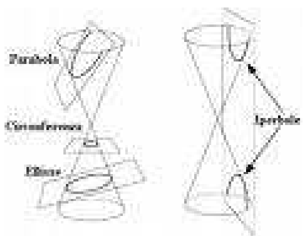
Ciò significa che, se un punto $P_0(x_0;y_0)$ appartiene al luogo, le sue coordinate soddisfano l'equazione $F(x_0;y_0)=0$ (vedi esempio di un punto appartenente ad una retta); viceversa, se la coppia ordinata di numeri reali $(x_0;y_0)$ soddisfa l'equazione, allora il punto gode della proprietà richiesta, P_0 appartiene al luogo.
In simboli: $P_0\ (x_0;y_0) \in$ al luogo $\Leftrightarrow$ $F(x_0;y_0)=0$

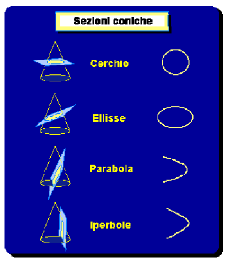
La GEOMETRIA ANALITICA è quella parte della matematica che studia le figure e le loro proprietà con l'aiuto del calcolo algebrico, cioè con METODO ANALITICO.

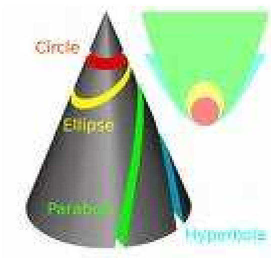
Sezioni coniche e condizioni caratteristiche

Def: CHIAMIAMO CONICA QUELLA CURVA CHE SI OTTIENE INTERSECANDO UN CONO ROTONDO INDEFINITO CON UN PIANO PASSANTE PER IL VERTICE DEL CONO.

http://web.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/guida/paginaindice.php?id=2&idd=1





Consideriamo un cono di rotazione di vertice V, asse a e angolo al vertice 2a. Sia π un generico piano non passante per il vertice del cono e tale che sia b l'angolo acuto che esso forma con l'asse del cono. Si hanno i seguenti tre casi:

a) Se risulta b>a il piano taglia il cono lungo una linea chiusa dette ELLISSE
   - Se risulta b=90° abbiamo un caso particolare di ellisse che è il CERCHIO
   - Se il piano passa per il vertice si hanno il cerchio e l'ellisse degenere che coincidono con un punto

b) Se risulta b=a il piano taglia il cono lungo una linea aperta che chiameremo PARABOLA
   - Se il piano passa per il vertice risulta anche tangente ad una generatrice del cono stesso; avremo la parabola degenere che risulta costituita da due rette coincidenti

c) Se risulta b<a il piano taglia il cono lungo una linea aperta costituita da due rami detta IPERBOLE
   - Se il piano passa per il vertice, esso taglierà il cono lungo due delle sue generatrici; avremo l'iperbole degenere che risulta costituita da due rette concorrenti

Le linee ovvero le curve che rappresentano l'ellisse ed il cerchio, la parabola e l'iperbole sono tutte costituite da insiemi di punti che verificano relazioni di tipo luogo geometrico che nel caso delle coniche soddisfano la seguente definizione generica (valida per tutti i tipi di coniche) :

LUOGO DEI PUNTI DEL PIANO PER I QUALI RISULTA COSTANTE IL RAPPORTO DELLE DISTANZE DA UN PUNTO FISSO DETTO FUOCO E DA UNA RETTA FISSA DETTA DIRETTRICE.

Tale rapporto è detto ECCENTRICITA' della conica e l'equazione del luogo è una relazione del tipo
$\boxed{d(P,F)=e * d(P,r)}$
(la distanza del punto dal fuoco è ugule al prodotto dell'eccentricità per la distanza del punto dalla retta)

- se e<1 avremo un ellisse
- se e=1 avremo una parabola
- se e >1 avremo un iperbole
- se e =0 avremo una circonferenza

Vediamo in dettaglio quali sono i luoghi a secondo del tipo di sezione conica quali sono le equazioni caratteristiche, riservandoci di ricavarle nel segmento successivo.

- <u>CIRCONFERENZA</u>: luogo dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro
  d(P,C)=cost $\Rightarrow$ $\boxed{x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0}$
- <u>PARABOLA</u>: luogo dei punti equidistanti da una retta d e da un punto fisso F
  d(P,F)=d(P,d) $\Rightarrow$ $\boxed{y=ax^2+bx+c}$
- <u>ELLISSE</u>: luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi
  d(PF')+d(PF)=cost $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$
- <u>IPERBOLE</u>: luogo dei punti per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
  d(PF')-d(PF)=cost $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

<u>Equazioni analitiche del luogo conica</u>

Partendo dalle singole definizioni di luogo, per ogni curva troveremo le equazioni analitiche cartesiane che le descrivono e ci accorgeremo che esse avranno, a secondo dei casi, un modo caratteristico di esplicitarsi (e sarà proprio l'aspetto dell'equazione che ci permetterà di capire di quale sezione conica tratta). Ma in generale si può dire che saranno del tipo algebrico di secondo grado:

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

in cui almeno uno dei tre coefficienti è diverso da zero.

DEF: una curva si dice ALGEBRICA se la sua equazione in un riferimento cartesiano è del tipo f(x;y)=0 dove f(x;y) è un POLINOMIO di grado n.

- CIRCONFERENZA $\Rightarrow$ $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$
- PARABOLA: $\Rightarrow$ $y=ax^2+bx+c$
- ELLISSE: $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- IPERBOLE: $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ATTIVITA' GUIDATA
Costruiamo la curva della parabola partendo dalla sua definizione.
Anzitutto diremo asse della parabola la retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice.
Sia data la retta d ed un punto F non appartenente ad essa. Ci proponiamo di costruire per punti la parabola..
Conduciamo l'asse della parabola. E' evidente che il punto medio tra fuoco e direttrice è un punto appartenente alla parabola e lo chiameremo vertice.
Conduciamo un fascio di rette parallele alla direttrice, e intersechiamo ciascuna di queste con la circonferenza avente per centro il punto F e per raggio la distanza della retta considerata dalla direttrice. Otteniamo così un certo numero di punti, simmetrici rispetto all'asse della parabola, unendoli con un tratto continuo, abbiamo la curva cercata. L'asse della parabola si vede che è anche asse di simmetria. L'unico punto unito è il vertice.

Intersezione tra coniche o tra una conica ed una retta

In analogia a quanto visto per le intersezioni tra due rette, segue che date due curve di equazioni $F_1(x;y)=0$ e $F_2(x;y)=0$, se $p(x_0;y_0)$ è un punto di intersezione delle due curve, esso appartiene ad entrambe, quindi le sue coordinate devono soddisfare sia la prima che la seconda equazione, ovvero $F_1(x_0;y_0)=0$ e $F_2(x_0;y_0)=0$. Pertanto tale punto sarà soluzione del sistema costituito dalle due equazioni . Viceversa se $(x_0;y_{0)}$ soluzione del sistema allora appartiene alle due curve, quindi è il loro punto di intersezione.

Quindi per trovare il punto di intersezione di due curve basta risolvere tale sistema; la stessa cosa per trovare i punti di intersezione tra una curva ed una retta.

Schematizzando, il sistema può avere le seguenti soluzioni:
Due soluzioni distinte $\longrightarrow$ 2 punti di intersezione $\longrightarrow$ secante
Due soluzioni coincidenti $\longrightarrow$ 2 punti coincidenti $\longrightarrow$ tangente
Sistema impossibile $\longrightarrow$ punti immaginari $\longrightarrow$ esterna.